УДК 517.968.72

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

© Н.А. Баранов, О.Э. Красников

Baranov N.A., Krasnikov O.E. Numerical method for the equation solution to dynamics of conditions of a system with a continuous set of conditions. The article investigates the system which condition modification occurs under the influence of two independent discontinuous Markov processes. It is supposed, that a set of system's conditions is continuous. In that case dynamics of system's conditions is described by the integro-differential equation of Kolmogorov - Feller type. The solution method based on digitization of a set of system's conditions is offered for this equation.

При исследовании технического состояния сложных технических систем, как правило, рассматриваются системы с дискретным конечным множеством состояний [1]. Вместе с тем во многих случаях множество состояний системы является непрерывным. Например, ресурс, сопротивляемость [2], несущие свойства конструкции технического объекта являются непрерывными величинами. При этом изменение состояния системы в процессе функционирования во многих случаях может быть описано марковским разрывным процессом, например, в тех случаях, когда изменение состояния системы происходит в результате потока внешних воздействий.

В тех случаях, когда эволюция состояний системы происходит под воздействием марковского разрывного процесса, изменение плотности распределения состояний системы описывается интегро-дифференциальным уравнением типа Колмогорова – Феллера [3, 4]. В общем случае решения этого уравнения являются обобщенными функциями [5], т. е. плотность распределения может содержать сингулярную составляющую типа дельта-функции. Другими словами, функция распределения состояний системы в общем случае может быть разрывной, даже если интенсивности переходов системы из одного состояния в другое являются непрерывными функциями состояний. В частности, сингулярный характер решение имеет в случае, если система имеет предельное состояние [6].

Кроме того, во многих случаях начальное условие для уравнения изменения плотности распределения состояний системы также является сингулярным: предполагается, что плотность распределения в начальный момент времени является дельта-функцией исправного состояния. Другими словами, предполагается, что в начальный момент времени с вероятностью 1 система находится в исправном состоянии.

Сингулярный характер начальных условий и решения затрудняет применение классических конечно-разностных методов. В связи с этим в настоящей работе предложен метод решения интегро-дифференциального уравнения типа Колмогорова – Феллера, основанный на дискретизации непрерывного множества состояний системы. Такая дискретизация позволяет свести исходное интегро-дифференциальное уравнение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям теории массового обслуживания [7, 8].

Рассмотрим систему с непрерывным множеством состояний $s \in [0,1]$. Состояние $s = 0$ является исправным состоянием, состояния $s \in (0,1)$ - работоспособными, а состояние $s = 1$ является предельным состоянием, при котором система не способна выполнять свое целевое назначение, т. е. прекращает свое функционирование.

Будем предполагать, что в процессе функционирования системы состояние системы может изменяться в результате двух независимых потоков событий. Первый поток событий представляет собой поток внешних воздействий на систему. Этот поток событий представляет собой пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda(t) \geq 0$. В результате внешнего воздействия система, находящаяся в состояние $s \in [0,1)$, может перейти в любое состояние $\sigma \in [s,1]$. При этом переход системы из состояния s в состояние σ описывается в общем случае нестационарной условной плотностью вероятности $\pi(s,\sigma,t)$ при условии, что произошло внешнее воздействие на систему.

Таким образом, изменение состояния s системы на интервале времени $[t, t + \Delta t]$ описывается плотностью вероятности $\lambda(t)\pi(s,\sigma,t)\Delta t$.

Помимо процесса изменения состояния системы в результате внешних воздействий имеет место процесс перехода системы из любого работоспособного состояния $s \in [0,1)$ в предельное состояние $s = 1$, который характеризуется в общем случае также нестационарной вероятностью $\varphi(s,t)$. Этот процесс будем называть процессом разрушения, а вероятность $\varphi(s,t)$ соответственно вероятностью разрушения.

Физический смысл таких переходов можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть система представляет собой некоторый технический объект, например, летательный аппарат, и каждому состоянию $s \in [0,1)$ системы соответствует определенное значение величины несущей способности $\nu_{\lim}(s)$ конструкции системы. При этом состоянию $s = 1$ соответствует полная потеря несущей способности, т. е. $\nu_{\lim}(1) = 0$. В процессе своего функционирования система испытывает в общем случае случайные нестационарные нагрузки. Если в некоторый момент времени t величина действующих на систему нагрузок $\xi(t)$ превышает величину несущей способности $\nu_{\lim}(s)$ конструкции системы, находящейся в состояние $s \in [0,1)$, то происходит разрушение системы, т. е. полная потеря ею несущей способности, что соответствует переходу системы в состояние $s = 1$. В этом случае вероятность перехода системы из состояния $s \in [0,1)$ в предельное состояние $s = 1$ определяется вероятностью

$$\varphi(s,t) = P(\xi(t) \geq \nu_{\lim}(s)).$$

Таким образом, изменение состояния системы возможно в результате либо внешнего воздействия либо разрушения. Каждый из этих процессов представляет собой разрывный марковский процесс [3].

В соответствии со сделанными допущениями изменение состояния $s \in [0,1)$ системы в произвольный момент времени t возможно в результате следующих событий:

– переход в состояние s из произвольного состояния $\sigma < s$ в результате внешнего воздействия;

– переход из состояния s в произвольное состояние $\sigma > s$ в результате внешнего воздействия;

– переход из состояния s в предельное состояние в результате разрушения.

Изменение плотности распределения $p(s,t)$ состояний системы в произвольный момент времени t описывается интегро-дифференциальным уравнением Колмогорова – Феллера [3, 4]

$$\frac{\partial p(s,t)}{\partial t} = \lambda(t)\int_0^s p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma - \\ -\lambda(t)p(s,t)\int_s^1 \pi(s,\sigma,t)d\sigma - p(s,t)\varphi(s,t) \quad (1)$$

Для решения уравнения (1) необходимо задать начальное распределение состояний системы в момент времени $t = 0$:

$$p(s,0) = p^{(0)}(s). \quad (2)$$

Уравнение (1) описывает изменение плотности распределения $p(s,t)$ для состояний системы $s \in [0,1)$. В частности, для состояния $s = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial p(0,t)}{\partial t} = -p(0,t)\left(\lambda(t)\int_0^1 \pi(0,\sigma,t)d\sigma + \varphi(0,t)\right) \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет аналитическое решение вида

$$p(0,t) = p^{(0)}(0)\exp\left(-\int_0^t\left(\lambda(\tau)\int_0^1 \pi(0,\sigma,\tau)d\sigma + \varphi(0,\tau)\right)d\tau\right) \quad (4)$$

Состояние $s = 1$ является для рассматриваемой системы поглощающим, и уравнение для этого состояния имеет вид

$$\frac{\partial p(1,t)}{\partial t} = \lambda(t)\int_0^1 p(\sigma,t)\pi(\sigma,1,t)d\sigma + \int_0^1 p(\sigma,t)\varphi(\sigma,t)d\sigma \quad (5)$$

или

$$\frac{\partial p(1,t)}{\partial t} = \int_0^1 p(\sigma,t)(\lambda(t)\pi(\sigma,1,t) + \varphi(\sigma,t))d\sigma.$$

Для решения уравнения (1) выполним дискретизацию непрерывного множества состояний системы.

Введем в рассмотрение дискретное множество состояний $\{S_k\}_{k=0}^N$. Будем предполагать, что система находится в дискретном состоянии S_k, $k = 0, 1,\ldots, N-1$, если ее состояние s принадлежит интервалу $\left[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N}\right)$. Будем предполагать, что система находится в дискретном состоянии S_N, если она находится в предельном состоянии $s = 1$. В дальнейшем будем использовать обозначение

$$s_k = \frac{k}{N}.$$

Вероятность $p_k(t) = P(S_k,t)$ того, что система в произвольный момент времени t находится в дискретном состоянии S_k, $k = 0, 1,\ldots, N-1$, определяется через плотность распределения непрерывного множества состояний системы:

$$p_k(t) = P(S_k,t) = P(s \in [s_k, s_{k+1}), t) = \int_{s_k}^{s_{k+1}} p(s,t)ds.$$

Получим уравнения, описывающие изменение вероятностей $p_k(t)$, $k = 0, 1,\ldots, N-1$. Для этого проинтегрируем уравнение (1) по s на интервале $[s_k, s_{k+1})$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{s_k}^{s_{k+1}} p(s,t)ds = \lambda(t)\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(\int_0^s p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma\right)ds - \\ -\lambda(t)\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(p(s,t)\int_s^1 \pi(s,\sigma,t)d\sigma\right)ds - \int_{s_k}^{s_{k+1}}(p(s,t)\varphi(s,t))ds. \quad (6)$$

В соответствии с обобщенной теоремой о среднем значении [9] для второго и третьего интегралов в правой части уравнения (6), предполагая, что функция $\varphi(s,t)$ непрерывна по первому аргументу, имеем

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(p(s,t)\int_s^1\pi(s,\sigma,t)d\sigma\right)ds=\int_{\varsigma_2}^1\pi(\varsigma_2,\sigma,t)d\sigma\int_{s_k}^{s_{k+1}}p(s,t)ds \qquad (7)$$

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}}p(s,t)\varphi(s,t)ds=\varphi(\varsigma_3,t)\int_{s_k}^{s_{k+1}}p(s,t)ds, \qquad (8)$$

где $\varsigma_2,\varsigma_3\in[s_k,s_{k+1})$.

Первый интеграл в правой части уравнения (6) представим в виде

$$I_1=\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(\int_0^s p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma\right)ds=$$
$$=\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\int_{s_j}^{s_{j+1}}p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma+\int_{s_k}^{s}p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma\right)ds.$$

Воспользуемся вновь теоремой о среднем значении. Имеем

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}}p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma=\pi(\sigma_j,s,t)\int_{s_j}^{s_{j+1}}p(\sigma,t)d\sigma=\pi(\sigma_j,s,t)p_j(t),$$

где $\sigma_j\in[s_j,s_{j+1})$.

Тогда

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(\int_{s_j}^{s_{j+1}}p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma\right)ds=p_j(t)\int_{s_k}^{s_{k+1}}\pi(\sigma_j,s,t)ds,$$

т. е.

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\int_{s_j}^{s_{j+1}}p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma\right)ds=$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1}\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(\int_{s_j}^{s_{j+1}}p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma\right)ds=$$
$$=\sum_{j=0}^{k-1}p_j(t)\int_{s_k}^{s_{k+1}}\pi(\sigma_j,s,t)ds. \qquad (9)$$

Преобразуем теперь выражение для интеграла

$$J=\int_{sk}^{sk+1}\left(\int_{sk}^{s}p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma\right)ds.$$

Меняя местами порядок интегрирования, находим

$$J=\int_{s_k}^{s_{k+1}}p(\sigma,t)\left(\int_{\sigma}^{s_{k+1}}\pi(\sigma,s,t)ds\right)d\sigma=$$
$$=\int_{\sigma_k}^{s_{k+1}}\pi(\sigma_k,s,t)ds\int_{s_k}^{s_{k+1}}p(\sigma,t)d\sigma=$$
$$=p_k(t)\int_{\sigma_k}^{s_{k+1}}\pi(\sigma_k,s,t)ds. \qquad (10)$$

Предполагая непрерывность функции $\pi(\sigma,s,t)$ по переменным σ, s, функции $\varphi(s,t)$ по переменной s, а также, что интервалы $[s_k,s_{k+1})$ достаточно малы, представим полученные выражения для интегральных членов (7) – (10) в виде

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(p(s,t)\int_s^1\pi(s,\sigma,t)d\sigma\right)ds\approx p_k(t)\int_{s_k}^1\pi(s_k,\sigma,t)d\sigma \qquad (11)$$

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}}p(s,t)\varphi(s,t)ds\approx\varphi(s_k,t)p_k(t) \qquad (12)$$

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\int_{s_j}^{s_{j+1}}p(\sigma,t)\pi(\sigma,s,t)d\sigma\right)ds\approx$$
$$\approx\sum_{j=0}^{k-1}p_j(t)\int_{s_k}^{s_{k+1}}\pi(s_j,s,t)ds \qquad (13)$$

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}}p(\sigma,t)\left(\int_{\sigma}^{s_{k+1}}\pi(\sigma,s,t)ds\right)d\sigma\approx p_k(t)\int_{s_k}^{s_{k+1}}\pi(s_k,s,t)ds. \qquad (14)$$

Введем обозначение

$$\Pi_{jk}=\int_{s_k}^{s_{k+1}}\pi(s_j,s,t)ds,\ \varphi_k(t)=\varphi(s_k,t). \qquad (15)$$

Таким образом, с учетом соотношений (11) – (14) и обозначений (15) из уравнения (6) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вероятностей дискретных состояний системы:

$$\frac{\partial p_k(t)}{\partial t}=\lambda(t)\sum_{j=0}^{k-1}p_j(t)\Pi_{jk}(t)-\lambda(t)p_k(t)\sum_{j=k+1}^{N-1}\Pi_{kj}(t)-$$
$$-p_k(t)\varphi_k(t) \qquad (16)$$

$k=0,1,\ldots,N-1.$

Вероятность нахождения системы в предельном состоянии может быть вычислена, исходя из условия нормировки:

$$\sum_{k=0}^{N}p_k(t)=1,$$

откуда

$$p_N(t)=1-\sum_{k=0}^{N-1}p_k(t). \qquad (17)$$

Начальные условия определяются на основании начального условия (2) для исходного уравнения (1):

$$p_k(0)=\int_{sk}^{sk+1}p^{(0)}(s)ds\ \ k=0,1,\ldots,N-1,\ \ p_N(0)=0. \qquad (18)$$

Таким образом, полученная система уравнений (16), (17) с начальными условиями (18) позволяет вычислить вероятности нахождения системы в дискретных состояниях $\{S_k\}_{k=0}^{N}$. Получаемые в результате решения системы уравнений (16), (17) вероятности $\{p_k(t)\}_{k=0}^{N}$ определяют кусочно постоянную плотность распределения вида

$$\tilde{p}(s,t)=\begin{cases}\dfrac{p_k(t)}{s_{k+1}-s_k}, s\in[s_k,s_{k+1}), k=0,1,\dots,N-1,\\ p_N(t)\delta(1), \qquad s=1.\end{cases} \tag{19}$$

где $\delta(s)$ - дельта-функция.

Плотность распределения $\tilde{p}(s,t)$ (19) является численным решением исходного интегро-дифференциального уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буравлев А.И., Доценко Б.И., Казаков И.Е.* Управление техническим состоянием динамических систем. М.: Машиностроение, 1995.
2. *Куюнджич С.М.* Разработка и анализ моделей надежности и безопасности систем. М.: Физматлит, 2001.
3. *Булинский А.А., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.
4. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986.
5. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: МГУ, 1984.
6. *Новожилов Г.В., Неймарк М.С., Цесарский Л.Г.* Безопасность полета самолета. Концепция и технология. М.: Машиностроение, 2003.
7. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988.
8. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Физматлит, 1987.
9. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. Т. 1. М.: Высш. шк., 1980.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполняется при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 04-01-00867, 06-07-89285).

Поступила в редакцию 20 июля 2006 г.